Apodisation d'une tache de diffraction.

Question 1 :

Rappeler brièvement l'intensité obtenue dans une expérience de diffraction à l'infini avec la source ponctuelle au foyer de la première lentille et avec un diaphragme $\mathcal{D}$ de type fente fine et longue (largeur a et hauteur h). Donner des ordre de grandeur si les lentilles ont une distance focale de l'ordre du mètre, si $a \sim 0,2$ mm et $h \sim 2$ cm ; on prendra $\lambda \sim 0,5\ \mu$m.

On utilise, pour calculer l'amplitude complexe en un point M de coordonnées X et Y dans le plan focal de la seconde lentille, la formule :

$$\underline{s}(X,Y) = \iint_{\mathcal{D}} \exp\left[2\,\jmath\,\pi\,\left(\frac{x\,X + y\,Y}{\lambda\,f'}\right)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

où l'on reconnaît la sommation sur des sources secondaires de coordonnées x et y conformément au principe de Huygens-Fresnel. L'intégrale se factorise en :

$$\underline{s}(X,Y) = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{x\,X}{\lambda\,f'}\right)\,\mathrm{d}x\ \int_{-h/2}^{h/2} \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{y\,Y}{\lambda\,f'}\right)\,\mathrm{d}y$$

les calculs sont de routine et aboutissent à :

$$\underline{s}(X,Y) = a\,h\ \mathrm{snc}\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)\ \mathrm{snc}\left(\pi\,\frac{h\,Y}{\lambda\,f'}\right)$$

$$I(X,Y) = |\underline{s}(X,Y)|^2 = a^2\,h^2\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{h\,Y}{\lambda\,f'}\right) = I_{max}\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{h\,Y}{\lambda\,f'}\right)$$

Le second sinus cardinal au carré est négligeable dès que son argument dépasse $4\,\pi$ (au delà du troisième maximum secondaire), c'est-à-dire pour $|Y| > 4\,\lambda\,f'/h \sim 0,1$ mm, autant dire que la figure de diffraction a une hauteur quasi-nulle selon Y. Selon X, la tache principale s'étend entre $X = \pm\,\lambda\,f'/h \sim 2,5$ mm.

En pratique :

$$\text{si}\quad Y \neq 0 \quad I(X,Y) = 0$$

$$\text{et}\quad I(X,0) = I_{max}\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)$$

Question 2 :

On déplace la source parallèlement à OY de $b = 1$ cm vers le haut, que devient la tache de diffraction (on supposera que les lentilles ont mêmes distances focales) ? On remplace la source ponctuelle par plusieurs sources alignées sur OY, que devient la tache ? On remplace la source ponctuelle par une fente de largeur quasi-nulle selon OX de hauteur $2\,b = 2$ cm selon OY et de milieu O, que devient la tache ? Par quelle formule peut-on calculer l'intensité d'une tache de diffraction obtenue par un diaphragme allongé selon OY éclairée par une fente source elle aussi allongée selon OY ?

Quand on déplace la source, la tache subit une translation et son centre se trouve au niveau de l'image géométrique de la nouvelle source, ici la tache de hauteur nulle se trouve recopiée (plus bas de 1 cm puisque les lentilles ont mêmes distances focales, c'est facile a vérifier). En pratique :

$$\text{si}\quad Y \neq -h \quad I(X,Y) = 0$$

$$\text{et}\quad I(X,-h) = I_{max}\ \mathrm{snc}^2\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)$$

S'il y a N points sources, il y aura N taches recopiées centrées sur chacune des images.

Et si les points sources s'étendent continûment de -1 cm à 1 cm, la recopie de la tache balaie la zone entre les ordonnées extrêmes de leurs images. En pratique :

$$\text{si} \quad |Y| > h \quad I(X,Y) = 0$$

$$\text{si} \quad |Y| < h \quad I(X,Y) = I_{max}\ \text{snc}^2\left(\pi\,\frac{a\,X}{\lambda\,f'}\right)$$

En pratique, sur la hauteur de l'image géométrique de la fente source, l'intensité ne dépend que de X et peut-être calculée par l'intégrale simple :

$$\underline{s}(X) = \int_{-a/2}^{a/2} \exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{x\,X}{\lambda\,f'}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$I(X) = |\underline{s}(X)|^2$$

Question 3 :
La fente précédente est recouverte par une lame plus ou moins absorbante dont le coefficient de transmission, maximal au centre et nul sur les bords, varie avec x selon la loi $t(x) = \cos\left(\pi\,\frac{x}{a}\right)$. Calculer l'intensité en un point d'abscisse X et comparer avec la fente parfaitement transparente. On remplacera X par la variable adimensionnée $u = \frac{a\,X}{\lambda\,f'}$ et x par la variable adimensionnée $\xi = \frac{x}{a}$. On comparera le résultat obtenu avec celui de la question 1.

Donc le résultat est à comparer à $I(u) = I_{max}\ \text{snc}^2(\pi\,u)$.

On adapte le principe de Huygens-Fresnel en disant qu'un point du diaphragme réémet ce qu'il reçoit multiplié par $t(x)$, d'où

$$\underline{s}(X) = \int_{-a/2}^{a/2} t(x)\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{x\,X}{\lambda\,f'}\right)\,\mathrm{d}x = \int_{-a/2}^{a/2} \cos\left(\pi\,\frac{x}{a}\right)\,\exp\left(2\,\jmath\,\pi\,\frac{a\,x\,X}{a\,\lambda\,f'}\right)\,\mathrm{d}x$$

Les changements de variables proposés conduisent à

$$\underline{s}(u) = a\int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi\,\xi)\,\exp(2\,\jmath\,\pi\,u\,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Stratégiquement plutôt que de transformer l'exponentielle en combinaison de sinus et de cosinus, transformons le cosinus en combinaison d'exponentielles, l'intégration sera plus aisée.

$$\underline{s}(u) = \frac{a}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left[\exp(\jmath\,\pi\,\xi) + \exp(-\jmath\,\pi\,\xi)\right]\,\exp(2\,\jmath\,\pi\,u\,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{s}(u) = \frac{a}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \left[\exp(\jmath\,\pi\,(2\,u+1)\,\xi) + \exp(\jmath\,\pi\,(2\,u-1)\,\xi)\right]\,\mathrm{d}\xi$$

$$\underline{s}(u) = \frac{a}{2}\left[\frac{\exp(\jmath\,\pi\,(2\,u+1)\,\xi)}{\jmath\,\pi\,(2\,u+1)} + \frac{\exp(\jmath\,\pi\,(2\,u-1)\,\xi)}{\jmath\,\pi\,(2\,u-1)}\right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$\underline{s}(u) = \frac{a}{2}\left[\frac{2\,\jmath\,\sin(\pi\,(u+\frac{1}{2}))}{2\,\jmath\,\pi\,(u+\frac{1}{2})} + \frac{2\,\jmath\,\sin(\pi\,(u-\frac{1}{2}))}{2\,\jmath\,\pi\,(u-\frac{1}{2})}\right]$$

puis (avec $\sin(\theta+\pi/2)=\cos\theta$ et $\sin(\theta-\pi/2)=-\cos\theta$)

$$\underline{s}(u)=\frac{a}{2}\left[\frac{\cos(\pi\,u)}{\pi\,(u+\frac{1}{2})}-\frac{\cos(\pi\,u)}{\pi\,(u-\frac{1}{2})}\right]$$

$$\underline{s}(u)=\frac{a\,\cos(\pi\,u)}{2\,\pi}\left[\frac{1}{(u+\frac{1}{2})}-\frac{1}{(u-\frac{1}{2})}\right]$$

$$\underline{s}(u)=\frac{-a\,\cos(\pi\,u)}{\pi\,(u+\frac{1}{2})\,(u-\frac{1}{2})}$$

d'où

$$I(u)=\frac{a^2\,\cos^2(\pi\,u)}{\pi^2\,(u+\frac{1}{2})^2\,(u-\frac{1}{2})^2}$$

$$I(0)=\frac{16\,a^2}{\pi^2}$$

$$I(u)=I(0)\,\frac{\cos^2(\pi\,u)}{16\,(u+\frac{1}{2})^2\,(u-\frac{1}{2})^2}$$

$$I(u)=I(0)\,\frac{\cos^2(\pi\,u)}{(2\,u+1)^2\,(2\,u-1)^2}$$

Etudions maintenant cette fonction.

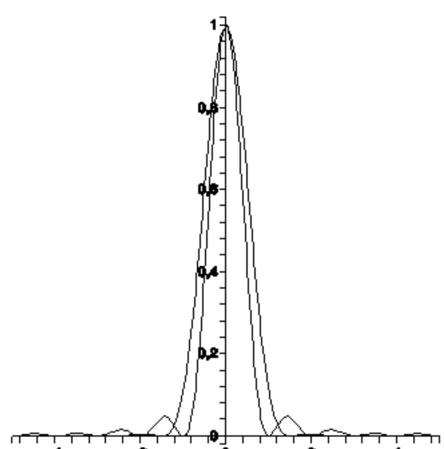
Elle est assez visiblement paire.

Le numérateur s'annule pour $u=\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,\frac{5}{2},\,\cdots$ mais le dénominateur s'annule aussi pour $u=\frac{1}{2}$. Pour ce point particulier, posons $u=\frac{1}{2}+\varepsilon$ et cherchons un équivalent.

$$I\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)=I(0)\,\frac{\cos^2(\pi\,\varepsilon+\frac{\pi}{2})}{(2\,\varepsilon+2)^2\,(2\,\varepsilon)^2}=I(0)\,\frac{\sin^2(\pi\,\varepsilon)}{(2\,\varepsilon+2)^2\,(2\,\varepsilon)^2}\sim I(0)\,\frac{\pi^2\,\varepsilon^2}{2^2\,(2\,\varepsilon)^2}=I(0)\,\frac{\pi^2}{16}$$

d'où

$$I\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}I\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)=I(0)\,\frac{\pi^2}{16}$$



Reste à évaluer les maximums secondaires ; le premier se trouve entre $u = \frac{3}{2}$ et $u = \frac{5}{2}$ et il n'est pas déraisonnable de le situer aux environs de $u = 2$ et donc d'en estimer la valeur à :

$$I(2) = I(0)\,\frac{\cos^2(2\,\pi)}{5^2\,3^2} = I(0)\,\frac{1}{225} = 0,0044\,I(0)$$

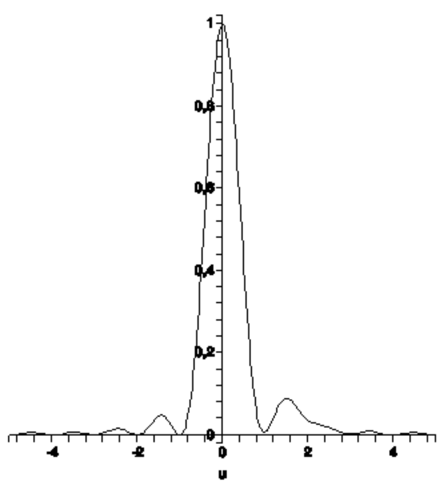
Cette valeur est trop petite pour être vue à l'œil nu. Il n'y a en pratique pas de maximum secondaire. C'est un avantage ; en contrepartie, le «lobe» principal s'étend de $u = -\frac{3}{2}$ à $u = \frac{3}{2}$, soit 50% de plus que l'intensité en $\mathrm{snc}(u)^2$ dont le lobe s'étend de $u = -1$ à $u = 1$.

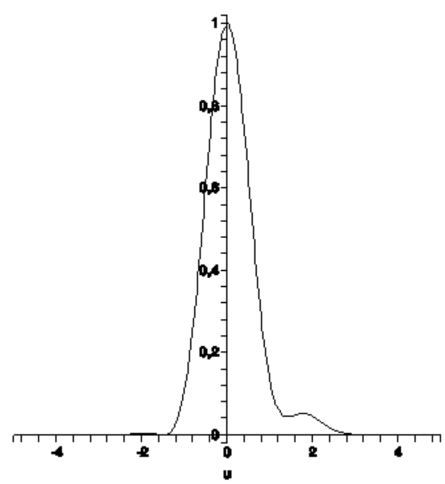
Ci-dessus un graphe où sont superposés les graphes de $I(u)/I(0)$ pour la fente de la question 2 et celle de la question 3.

Question 4 :
Comment adapter ce qui précède à une lunette astronomique ? Montrer l'intérêt de cette technique dans la recherche d'une étoile double.

Il suffit de rendre la lentille d'entrée de la lunette partiellement transparente, avec un subtil dégadé de transparent au centre à opaque sur les bords.

L'intérêt de supprimer les maximums secondaires est de mettre en évidence une étoile faible dont l'image géométrique, centre de sa tache de diffraction, serait située à l'endroit d'un maximum secondaire de la tache due à la première étoile. On a simulée ci-dessous ce qu'on obtient avec une seconde étoile de luminosité égale à 5% de celle de l'étoile principale et dont l'image est placée à $u = 1,7$. La première courbe correspond à une fente classique ; au mieux, on a des soupçons. La seconde à une fente en dégradé ; là, on a une quasi-certitude.





Comprenons bien qu'avec une lunette, la tache de la première étoile est une tache d'Airy entourée de trois anneaux pâlichons. Le seconde étoile rend un point du premier anneau un peu plus brillant ; on peut passer à côté. Avec la lunette en dégradé, le premier anneau n'est pas visible et la seconde étoile se manifeste par une espèce de pseudopode qui jouxte la tache d'Airy.